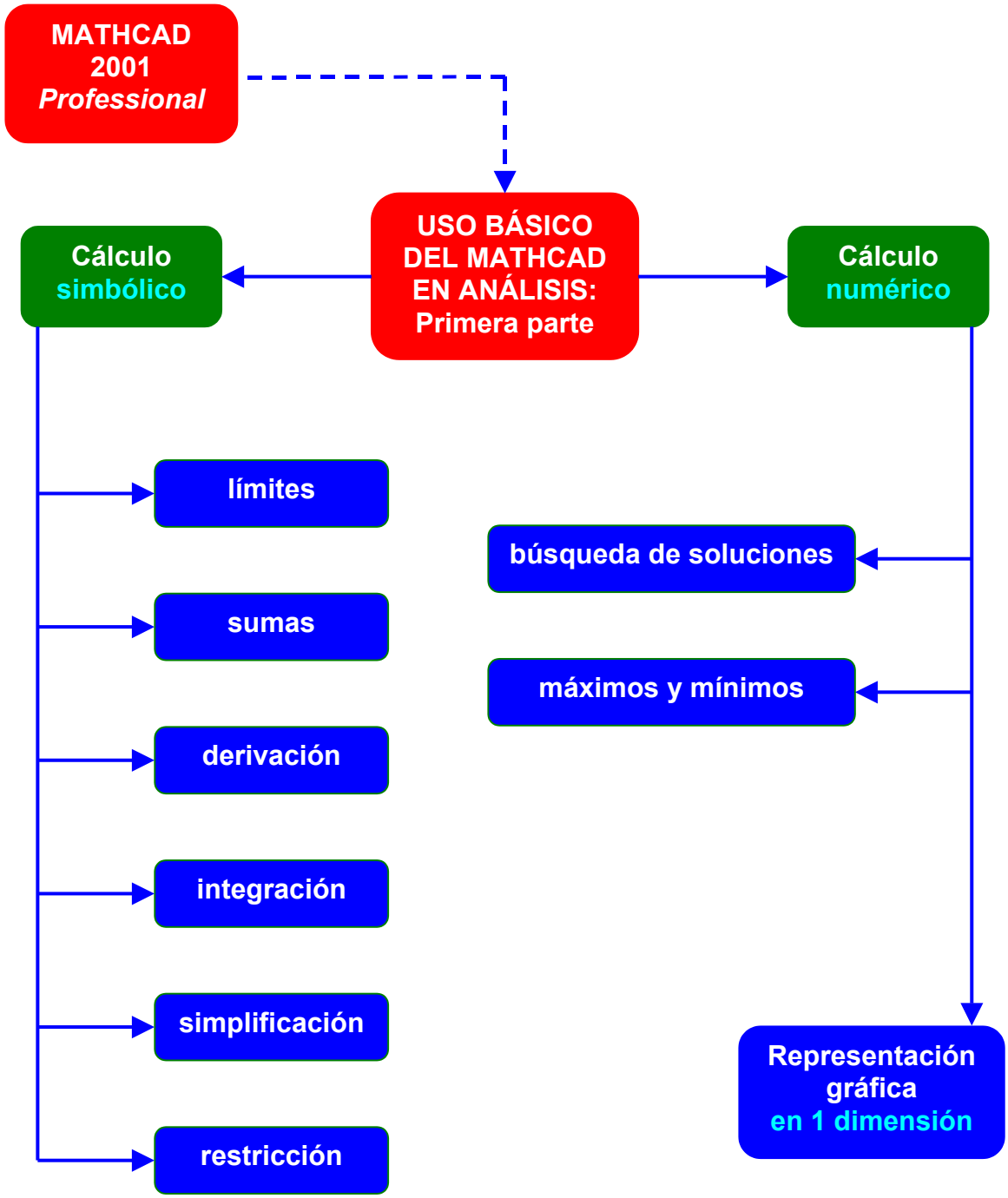
USO BÁSICO DEL MATHCAD EN ANÁLISIS (I): CÁLCULO SIMBÓLICO Y NUMÉRICO

Autor: Patrici Molinàs Mata (pmolinas@uoc.edu), José Francisco Martínez Boscá (jmartinezbos@uoc.edu).

ESQUEMA DE CONTENIDOS



INTRODUCCIÓN

Hemos visto en el Mathblock "Uso básico de Mathcad 2001 *Professional*" la convivialidad de este programa para la edición y cálculo con expresiones matemáticas. Entre la riqueza de posibilidades que ofrece Mathcad también se hallan las operaciones de cálculo simbólico así como las operaciones donde se persigue la obtención de un resultado numérico.

En este Mathblock vamos a describir en detalle cómo utilizar las operaciones de cálculo simbólico y numérico que ofrece Mathcad. Esto nos permitirá entender y reproducir sin dificultad las operaciones realizadas con Mathcad en los Mathblocks dedicados a temas específicos de Análisis.

OBJETIVOS DOCENTES

- Ilustrar las operaciones de cálculo simbólico más comunes que se pueden realizar con Mathcad.
- Alcanzar un buen dominio con Mathcad de la representación gráfica de cualquier función real de variable real.
- Mostrar las posibilidades de Mathcad en tareas de cálculo numérico.

CONOCIMIENTOS PREVIOS

Es imprescindible —previamente a la lectura de este Mathblock— el haber desarrollado cierta destreza en el manejo del programa Mathcad. Para ello es fundamental trabajar el Mathblock "Uso básico de Mathcad 2001 *Professional*" que encontraréis entre los Mathblocks de Algebra.

Después de haber trabajado este Mathblock podéis seguir con otros Mathblocks, en el siguiente orden: "Funciones de una variable", "Límites de funciones", "Continuidad en una dimensión", "Derivación", "Aplicaciones de las derivadas", "Sucesiones", "Series de números reales", "Series de potencias" y "Numeros complejos". En todos estos Mathblocks usaréis las técnicas de cálculo con Mathcad presentadas aquí. En éstos se intercala el aprendizaje analítico (con papel y lápiz) con el trabajo experimental con programario (Mathcad). Solemos llamar a esta combinación, el aprendizaje dual de las matemáticas.

El Mathblock "Uso básico del Mathcad en Análisis (II): Representación en tres dimensiones, programación y animación" constituye una continuación natural al estudio de las posibilidades

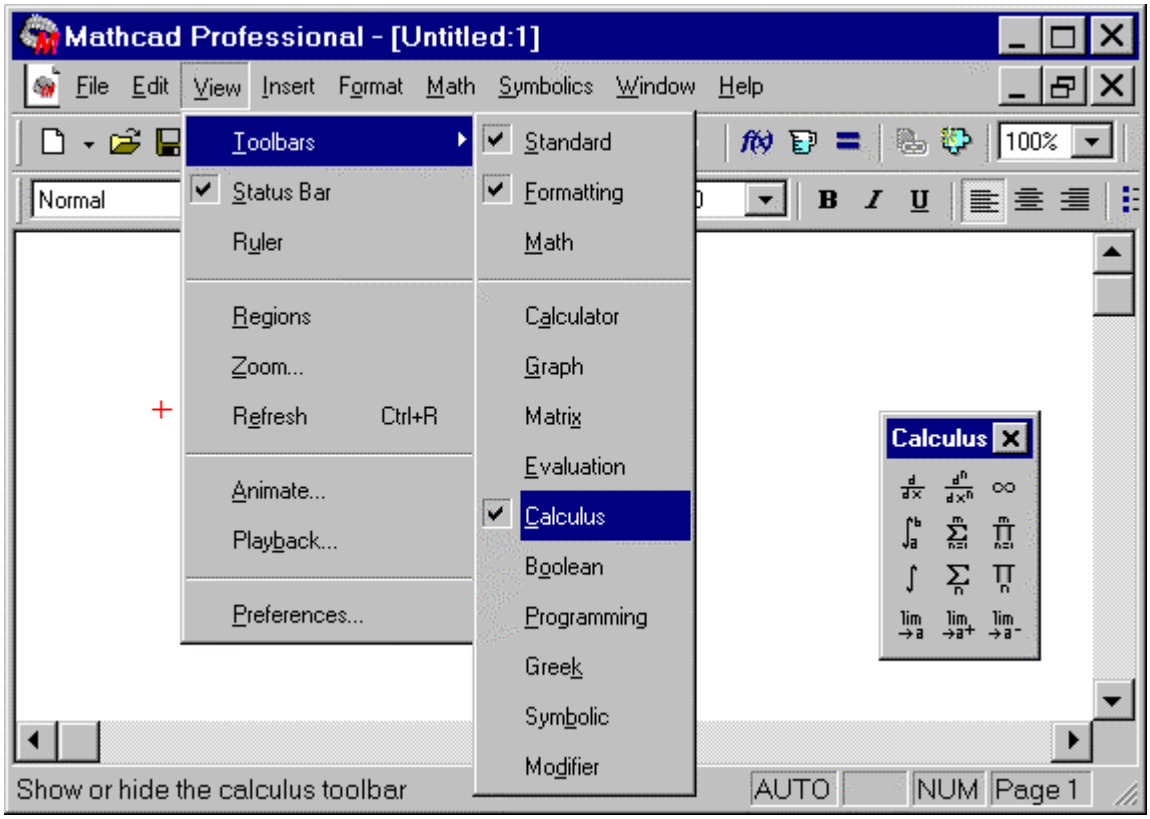
avanzadas de cálculo con Mathcad y es de lectura aconsejada una vez se haya trabajado con los Mathblocks que acabamos de nombrar.

CONCEPTOS FUNDAMENTALES

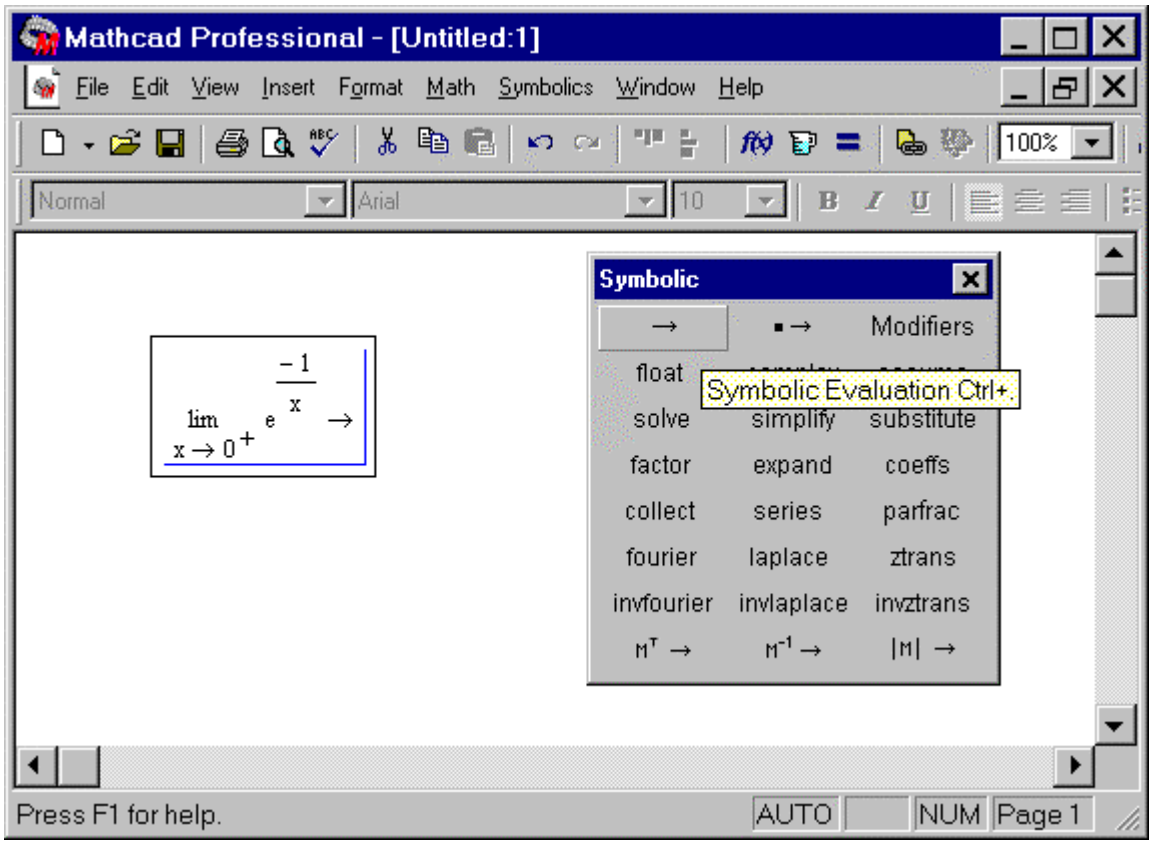
CÁLCULO SIMBÓLICO

- **Cálculo de límites laterales y del límite de una función en un punto**

Procedemos a calcular los límites laterales y el límite de una función en un punto mediante las instrucciones de cálculo simbólico que aparecen en la última línea del menú *View>Toolbars>Calculus*:



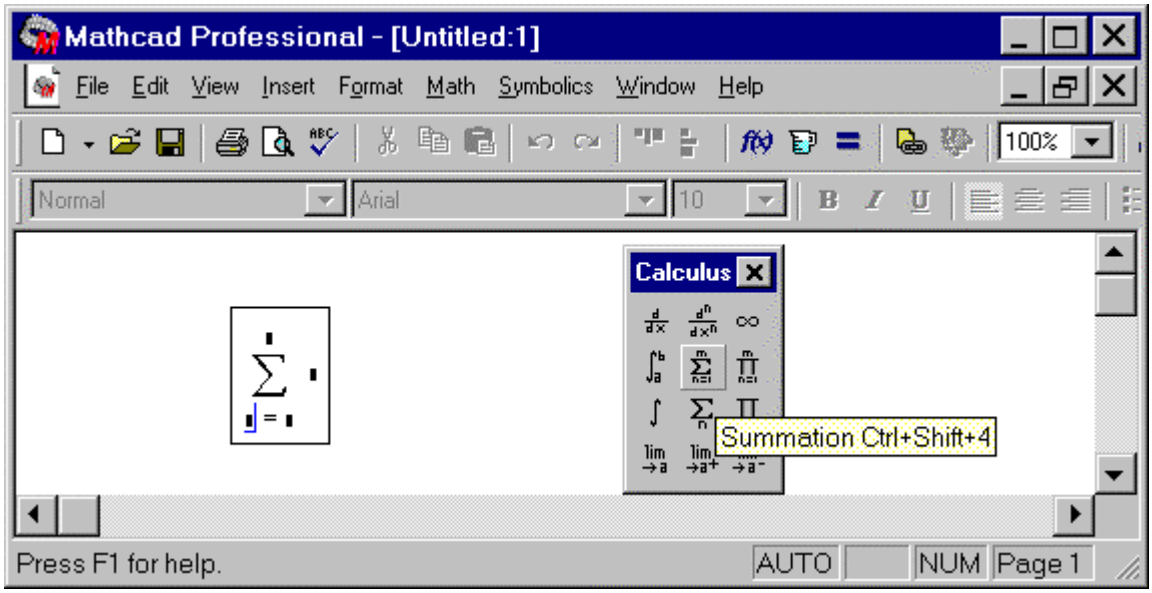
Tan pronto como hemos introducido la función cuyo límite buscamos, basta con pedir a Mathcad la evaluación simbólica de la siguiente forma *View>Toolbars>Symbolic*:



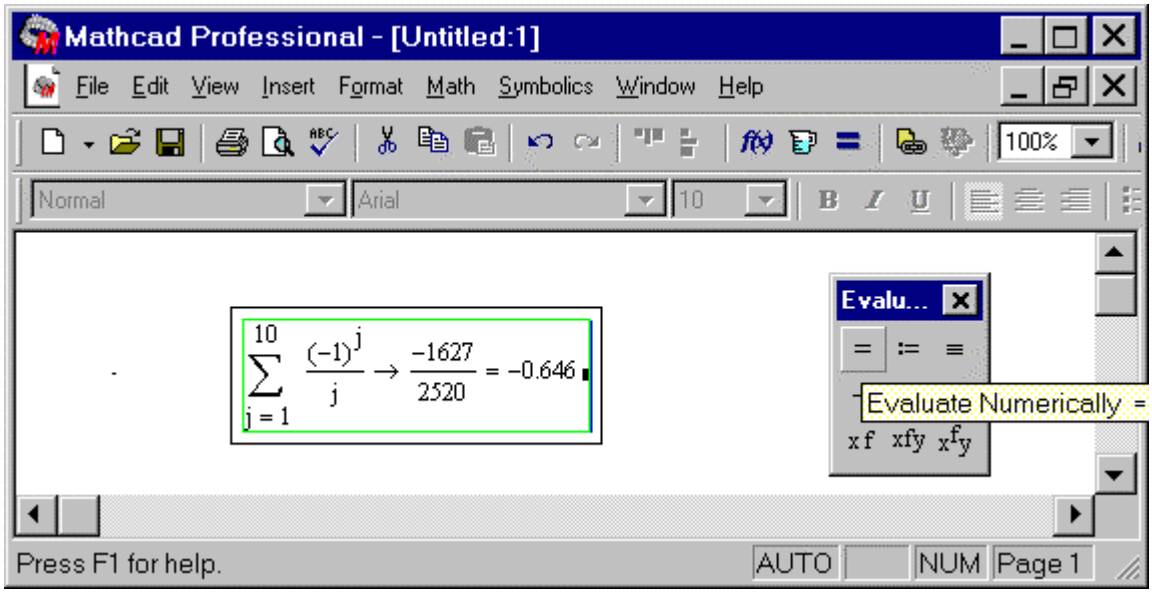
Dejamos para el lector la comprobación que dicho límite da cero.

- **Cálculo de sumas de series**

De forma análoga al cálculo de límites, sumamos series. Desde el menú *View>Toolbars>Calculus* introducimos el símbolo correspondiente, p.e., para la suma de una serie con 10 términos:

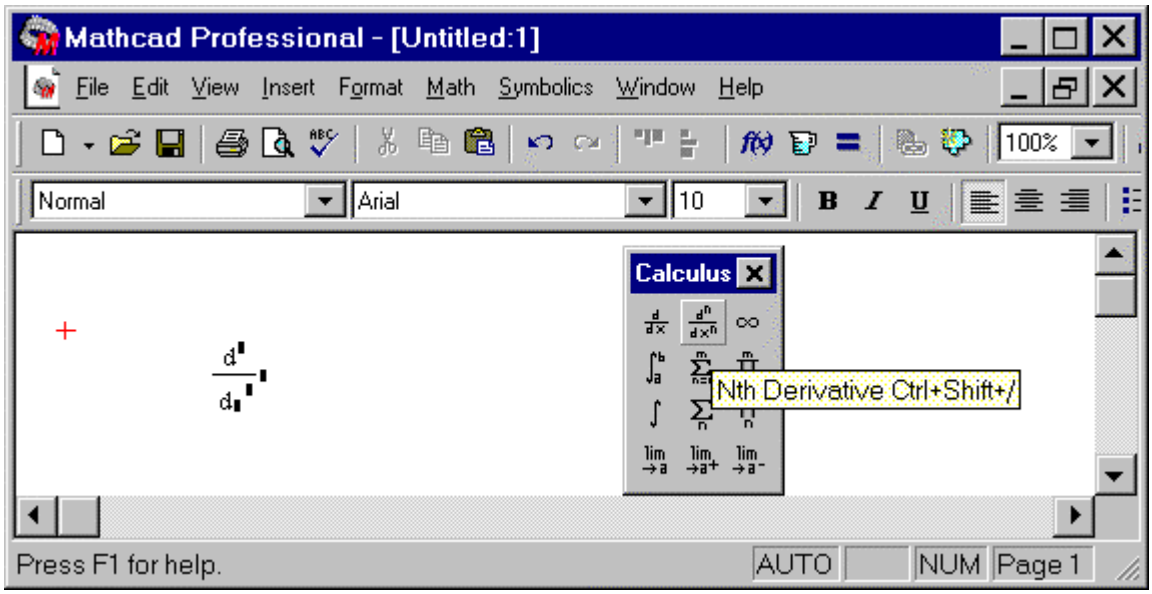


Después de introducir el índice de sumación y el índice del primer término, vamos a efectuar la suma con el operador de evaluación simbólica en *View>Toolbars>Symbolic* y, luego, con el evaluador numérico para obtener una cifra decimal en el mismo menú:

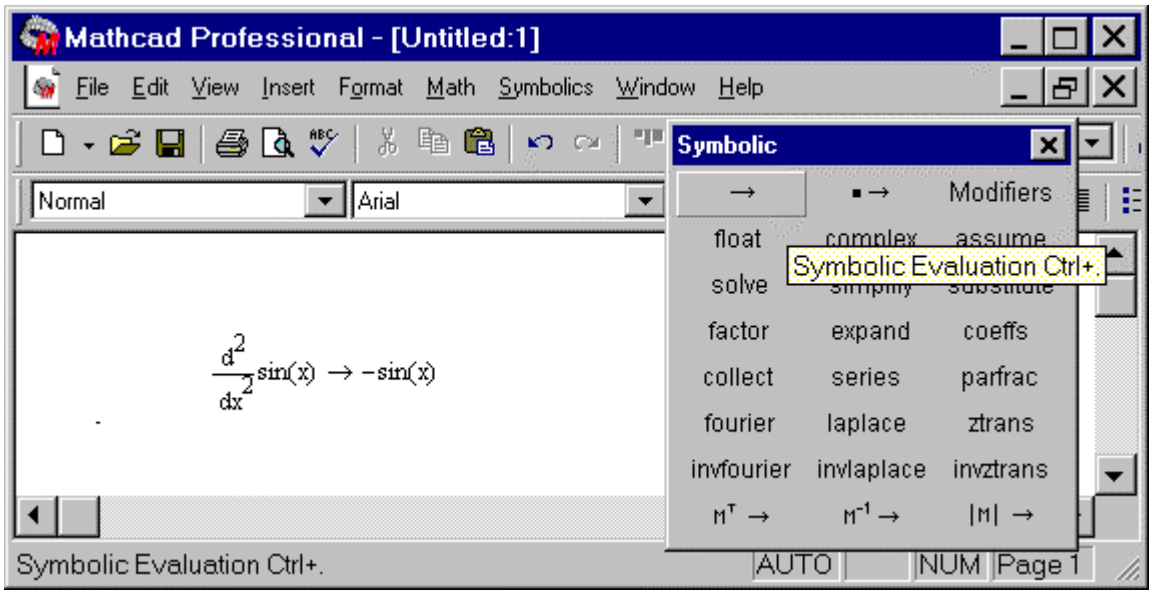


- **Cálculo de derivadas**

Para efectuar operaciones de derivación, volveremos al menú *View>Toolbars>Calculus* desde donde, p.e., introduciremos el operador derivada n-ésima:

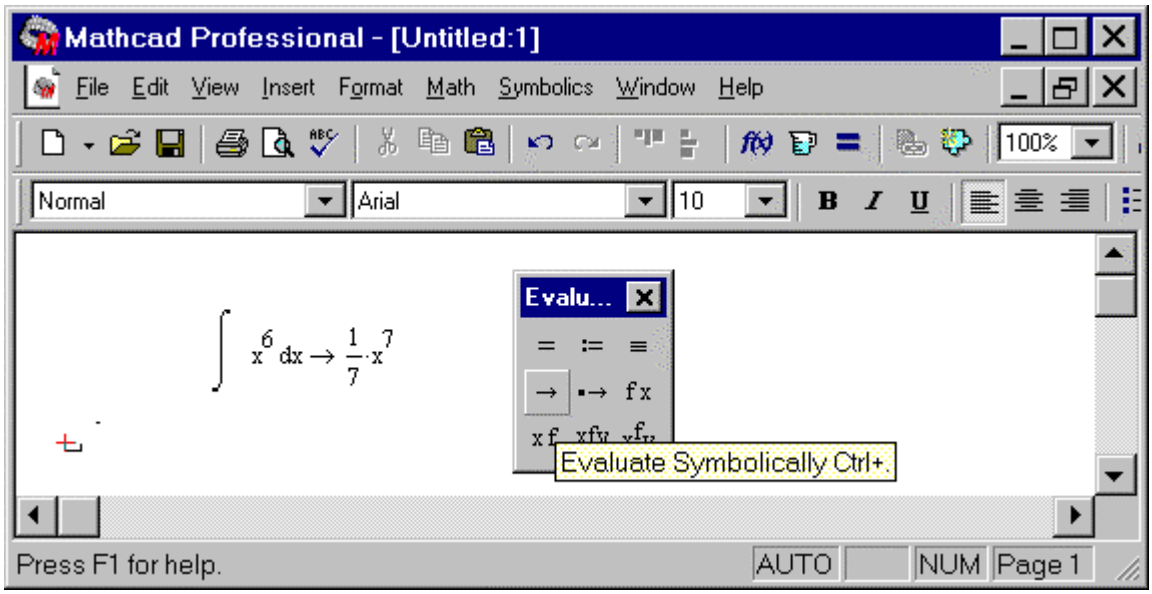

Mathcad Professional - [Untitled:1]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
Normal Arial 10
Calculus
Nth Derivative Ctrl+Shift+/
Press F1 for help.
AUTO NUM Page 1

Para obtener la función derivada, evaluaremos simbólicamente la expresión que hemos introducido:



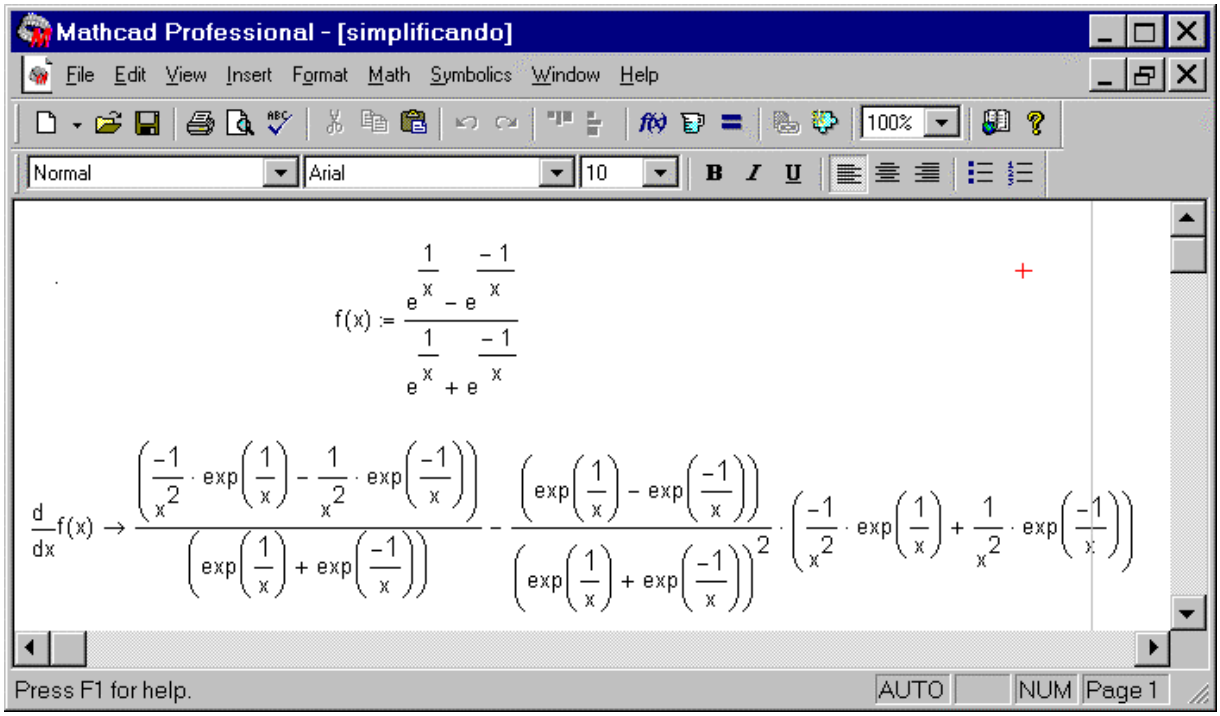
- **Cálculo de integrales**

Para efectuar operaciones de integración y siempre desde el menú *View>Toolbars>Calculus*, introducimos, p.e., el operador de integración indefinida. Después de introducir la función a integrar, vamos proceder a la integración con el evaluador simbólico. Esta vez, en lugar de llamarlo desde *View>Toolbars>Symbolic*, lo lanzaremos desde *View>Toolbars>Evaluation*:

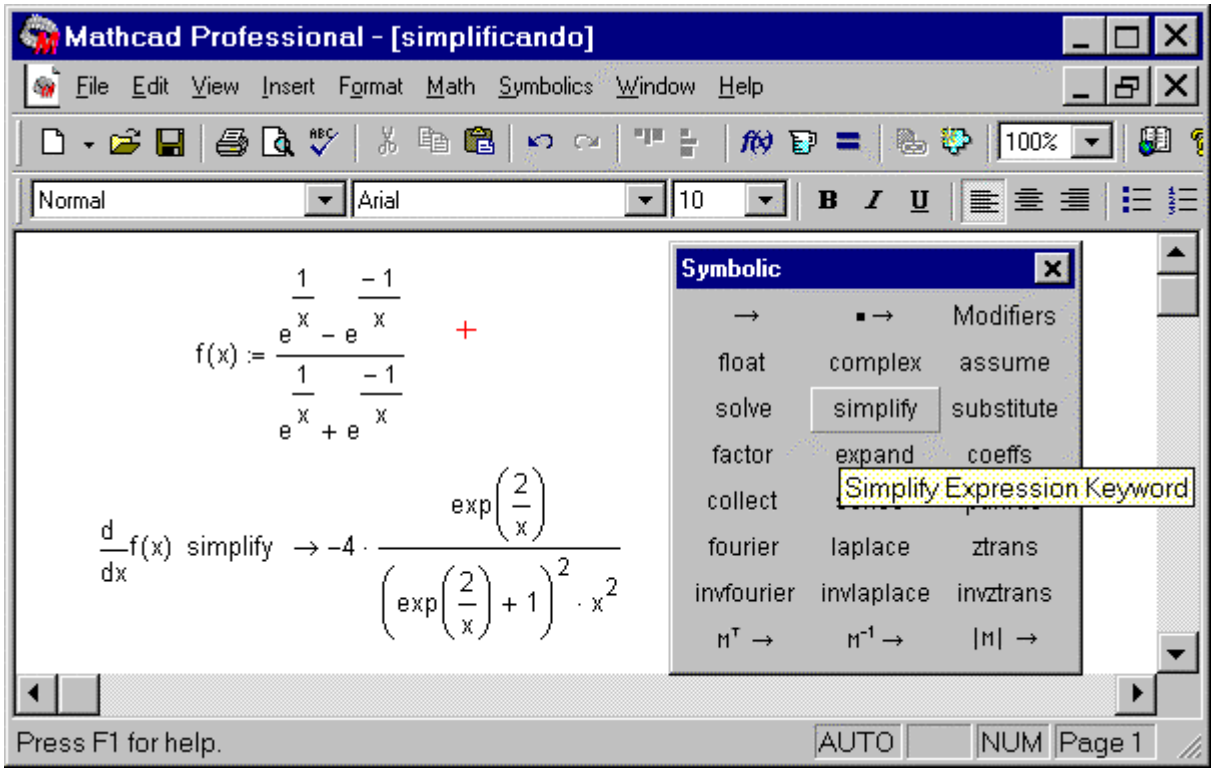


- **Simplificación de resultados simbólicos**

A menudo el resultado de una operación simbólica corresponde a una expresión de gran tamaño. Es siempre recomendable pedir a Mathcad que simplifique la expresión. Por ejemplo, efectuemos el siguiente cálculo de derivación:


Mathcad Professional - [simplificando]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
Normal Arial 10
$f(x) := \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}$
$\frac{d}{dx} f(x) \rightarrow \frac{\left(\frac{-1}{x^2} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x^2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)}{\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)} - \frac{\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) - \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)}{\left(\exp\left(\frac{1}{x}\right) + \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)^2} \cdot \left(\frac{-1}{x^2} \cdot \exp\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{x^2} \cdot \exp\left(\frac{-1}{x}\right)\right)$
Press F1 for help.
AUTO NUM Page 1

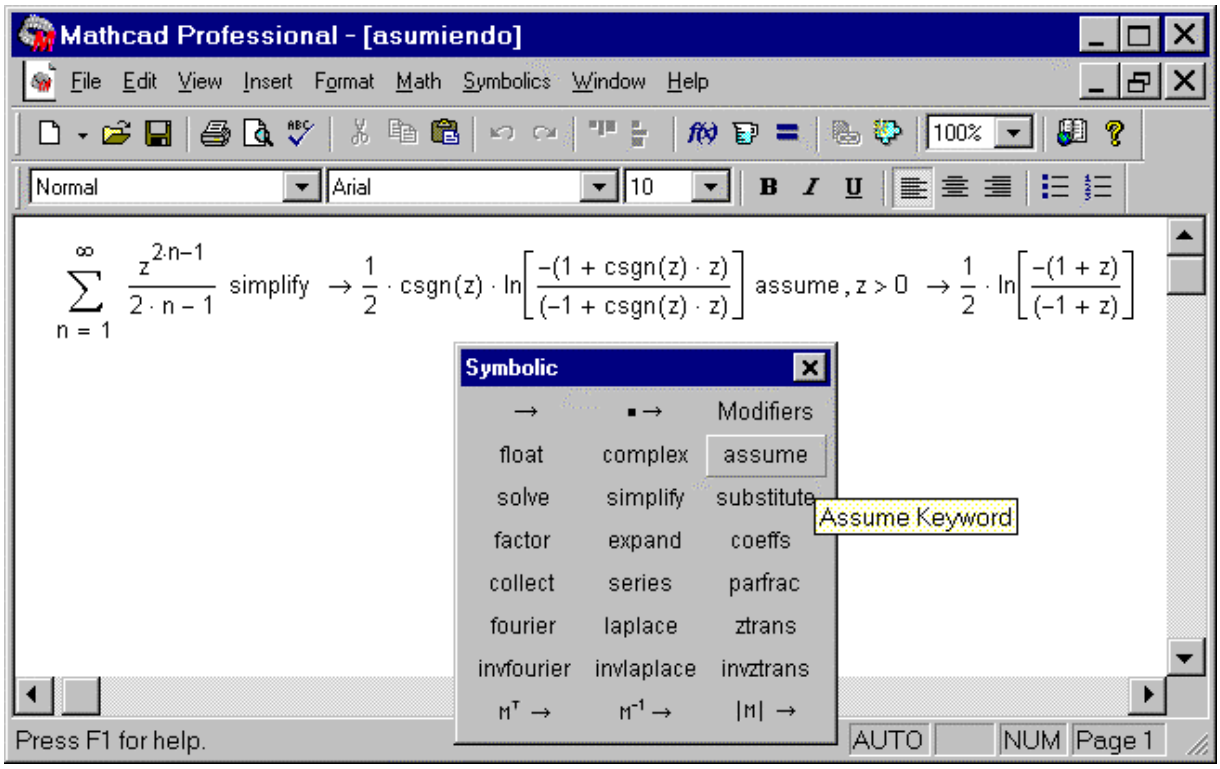
La expresión que obtenemos es larga y contiene términos comunes. Vamos a pedir a Mathcad que al mismo tiempo que calcula simbólicamente, simplifique. Para ello debemos introducir la instrucción *View>Toolbars>Symbolic>simplify*:


Mathcad Professional - [simplificando]
File Edit View Insert Format Math Symbolics Window Help
Normal Arial 10
$f(x) := \frac{e^{\frac{1}{x}} - e^{\frac{-1}{x}}}{e^{\frac{1}{x}} + e^{\frac{-1}{x}}}$
$\frac{d}{dx} f(x) \text{ simplify } \rightarrow -4 \cdot \frac{\exp\left(\frac{2}{x}\right)}{\left(\exp\left(\frac{2}{x}\right) + 1\right)^2 \cdot x^2}$
Symbolic
→ ▪→ Modifiers
float complex assume
solve simplify substitute
factor expand coeffs
collect
Simplify Expression Keyword
fourier laplace ztrans
invfourier invlaplace invztrans
Press F1 for help.
AUTO NUM Page 1

Vemos que el resultado obtenido es mucho más sencillo que el primero. Notad que en el origen la función no es derivable, ni tampoco continua.

- **Restricción de un resultado simbólico según el valor de la variable**

Es muy útil disponer de una instrucción que nos permita restringir el valor de la variable a aquellos valores de interés en nuestro problema o sencillamente para obtener una expresión más sencilla y manejable en el intervalo de la recta real en el que trabajamos. Entre los diversos modificadores que existen en Mathcad vamos a ilustrar el uso de la instrucción *"assume"* que encontramos en *View>Toolbars>Symbolic>assume*. En el siguiente ejemplo, efectuamos la suma infinita de una serie de potencias. El resultado, obtenido mediante la instrucción *"simplify"* cuya utilización hemos descrito con anterioridad, está expresado en función del signo de la variable. Asumiendo que la variable es positiva, la función signo vale 1 y obtenemos el resultado final:

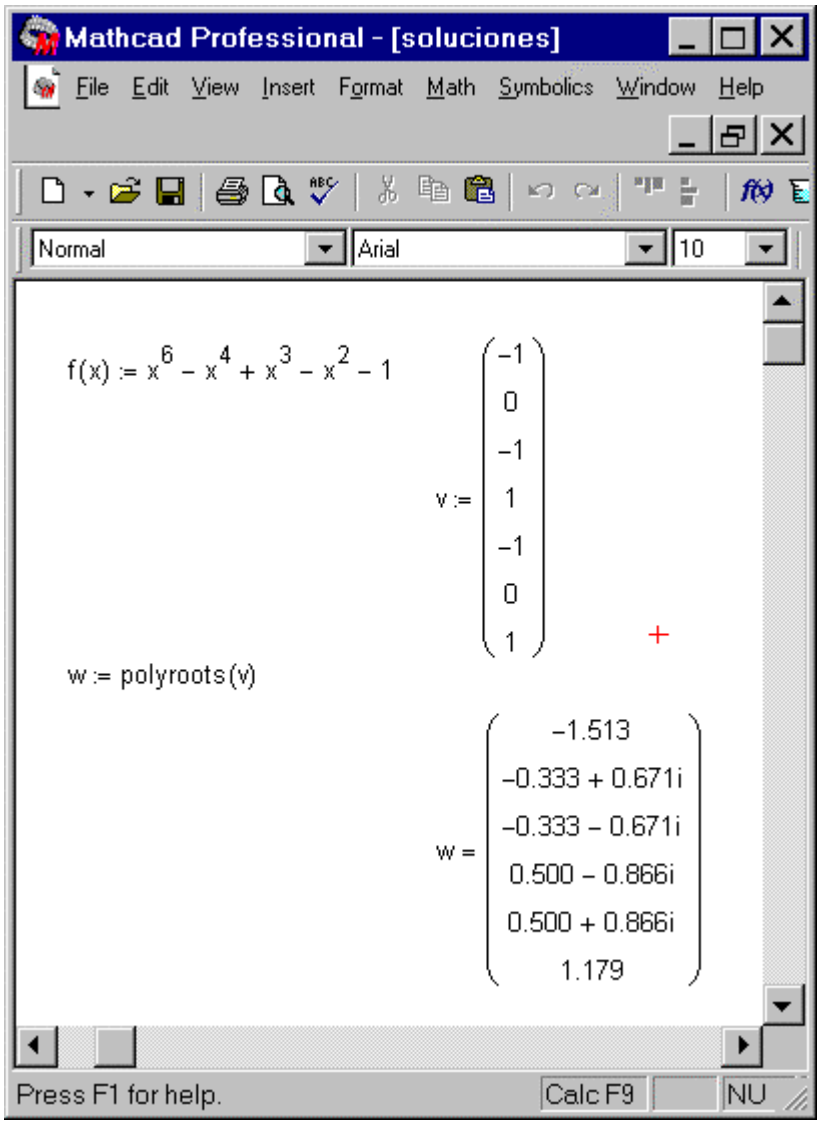


Es importante notar que esta serie de potencias de la variable z convergerá sólo para valores de la variable menores que 1 y mayores que –1. En efecto, el llamado radio de convergencia[1] de dicha serie de potencias es 1. Para estos valores, el argumento del logaritmo neperiano en la fórmula anterior es, por supuesto, siempre positivo.

[1] Véase el Mathblock Series de potencias para conocer el significado de este concepto.

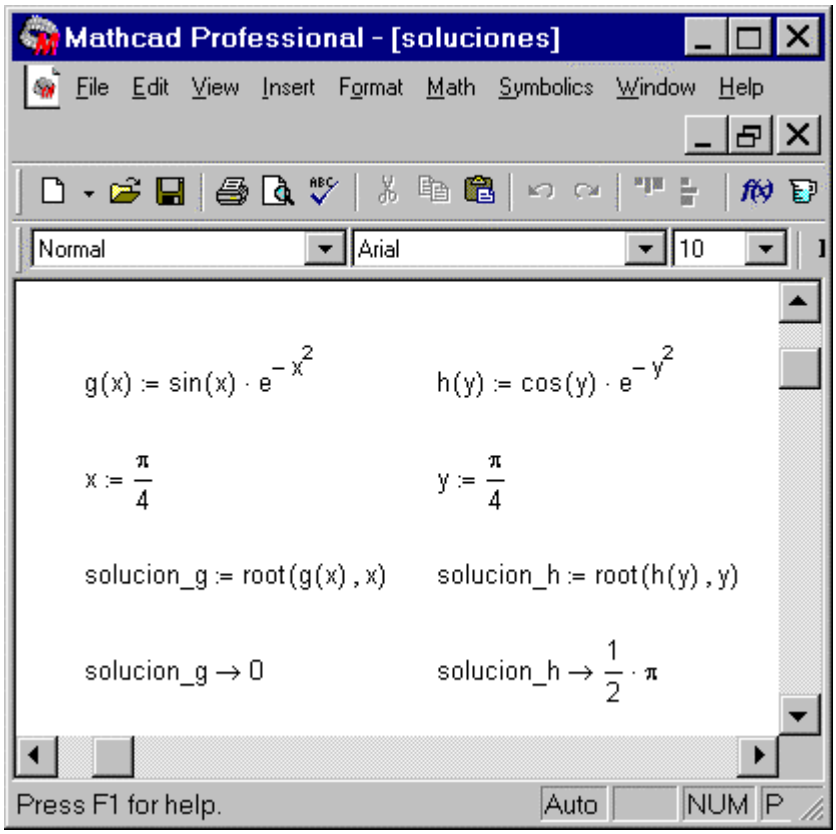
- **Búsqueda de soluciones numéricas de ecuaciones**

Si tratamos de averiguar las soluciones de una ecuación polinómica, f(x)=0, solemos aplicar la instrucción *"polyroots"* de gran facilidad de uso. Basta con introducir, en orden creciente, los coeficientes del polinomio cuyas raíces estamos buscando, en un vector, y luego aplicar la mencionada instrucción encima de éste:



En este caso, vemos que el polinomio de grado 6 que hemos escogido tiene dos raíces reales y dos pares de raíces complejo-conjugadas.

Cuando no se trate de un polinomio, sino de una función más general, vamos a solucionar el problema de búsqueda de raíces utilizando otras instrucciones. Para ilustrarlo utilizaremos la función *"root"* en la solución de dos ecuaciones no lineales:



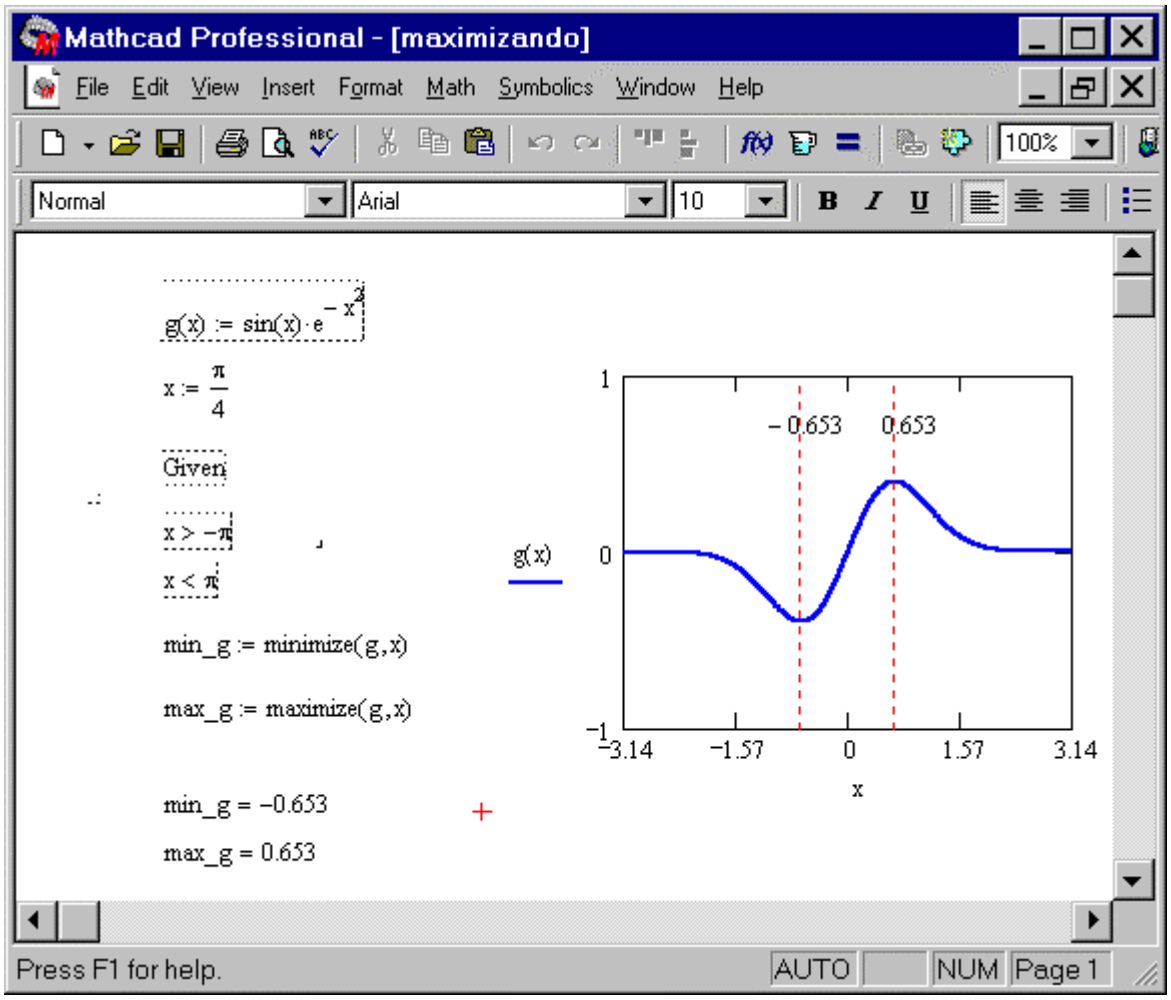
La instrucción *"root"* encuentra una raíz próxima al punto con el que inicializamos la función.

- **Determinación de los máximos y mínimos de una función**

Para buscar máximos y mínimos absolutos de una función utilizaremos las instrucciones "maximize" y "minimize" de la siguiente forma:

1. definiremos la función
2. daremos un valor numérico de inicialización a la variable independiente
3. introduciremos el *"Given"* seguido de condiciones lógicas con los operadores de *View>Toolbars>Boolean*
4. definiremos el valor mínimo con *"minimize"* y el máximo con *"maximize"*
5. evaluaremos numericamente dichos valores

Veamos, en un ejemplo, el funcionamiento de estas instrucciones:



Hemos representado a la derecha del proceso de búsqueda de extremos, la función según lo que explicaremos en el apartado siguiente sobre Representación gráfica en una dimensión. La gráfica confirma la exactitud de los resultados obtenidos.

- **Representación gráfica en una dimensión**

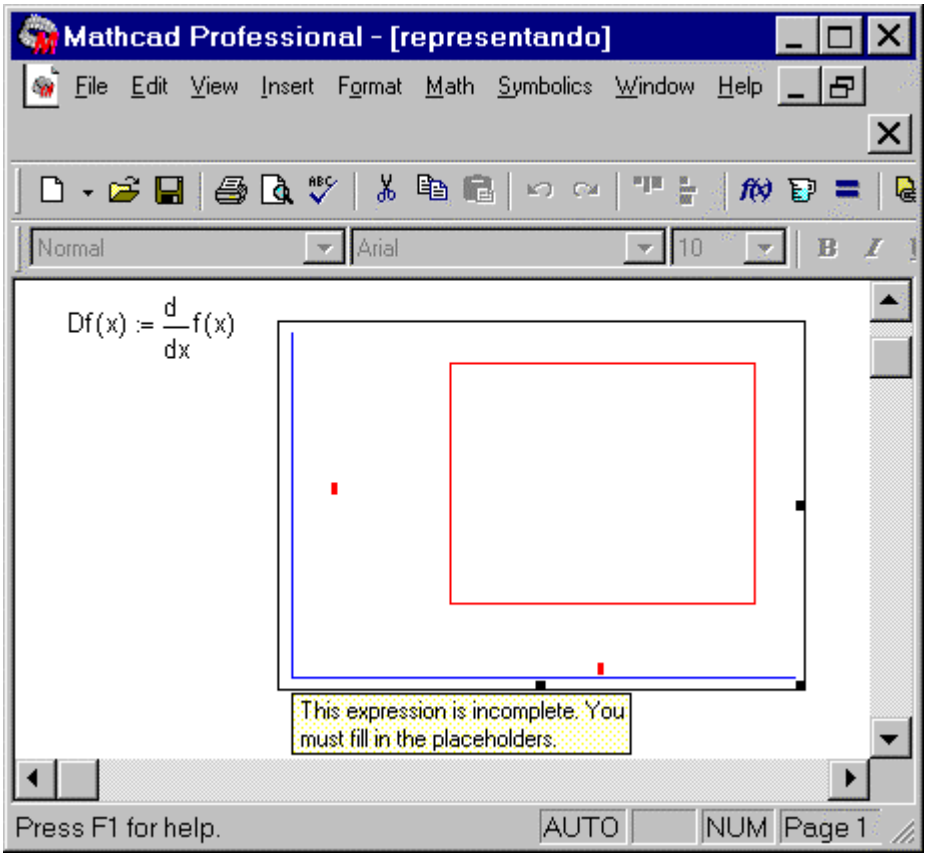
La representación gráfica en el mismo entorno de trabajo que el cálculo simbólico o el numérico constituye una de las ventajas más importantes que ofrece Mathcad. En cualquier etapa y en cualquier sitio de la hoja de trabajo, podemos incorporar una visión gráfica de cualquier función o tabla de datos. En particular, vamos a ver ahora como podemos visualizar la derivada de la función que hemos simplificado en el apartado de **Simplificación de resultados simbólicos**.

En primer lugar, vamos a definir la función derivada como, p.e., Df(x). Luego introduciremos una plantilla de representación X-Y de la siguiente forma:

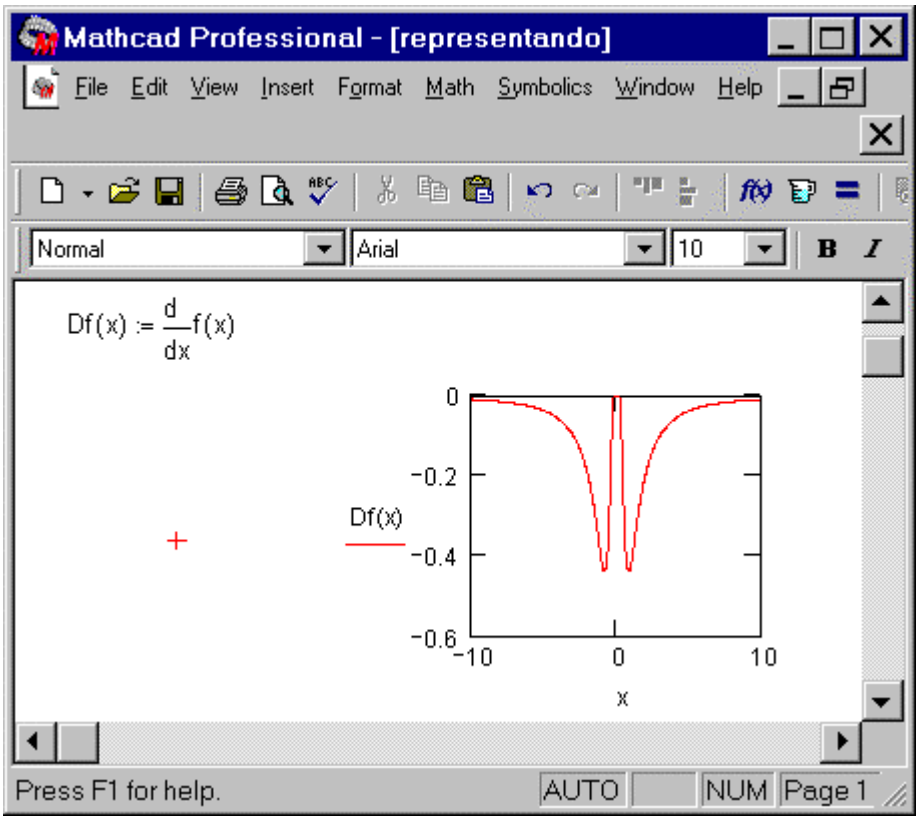
Una vez introducida la plantilla debemos rellenar los cuadraditos negros correspondientes a:

1. el nombre de la variable independiente (en el eje horizontal o de abcisas),
2. el nombre de la función o variable dependiente (en el eje vertical o de ordenadas),
3. el rango de cada segmento de eje representado, esto es, cuatro valores (dos valores inferiores y dos valores superiores).

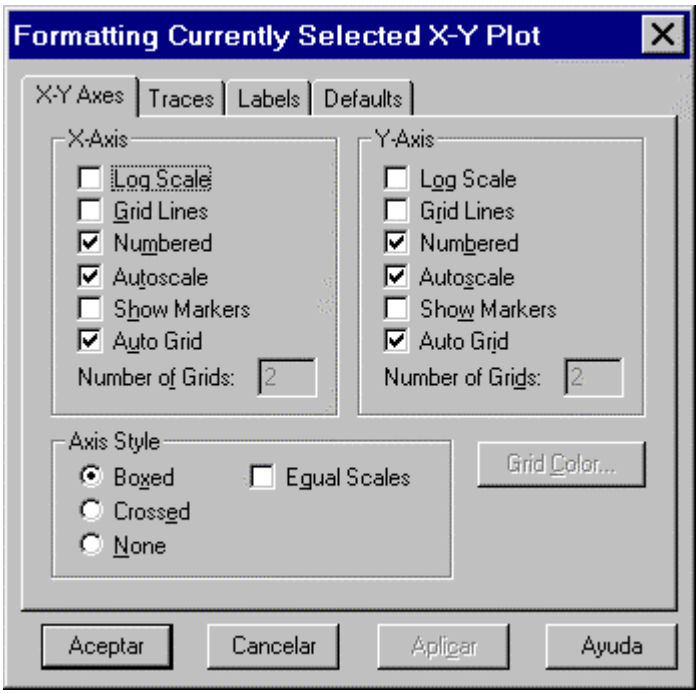
Esta es la apariencia de la plantilla X-Y del menú antes de rellenar los cuadrados negros:



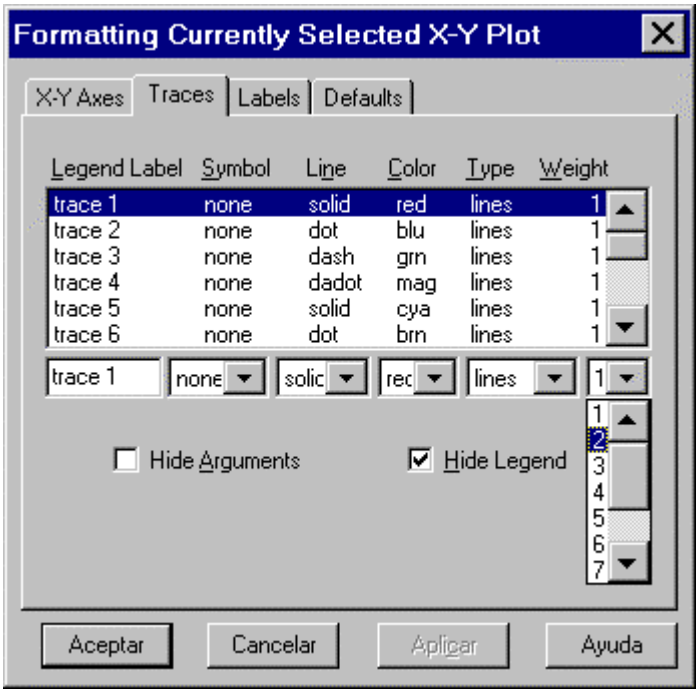
Una vez rellenados, aparece la gráfica:



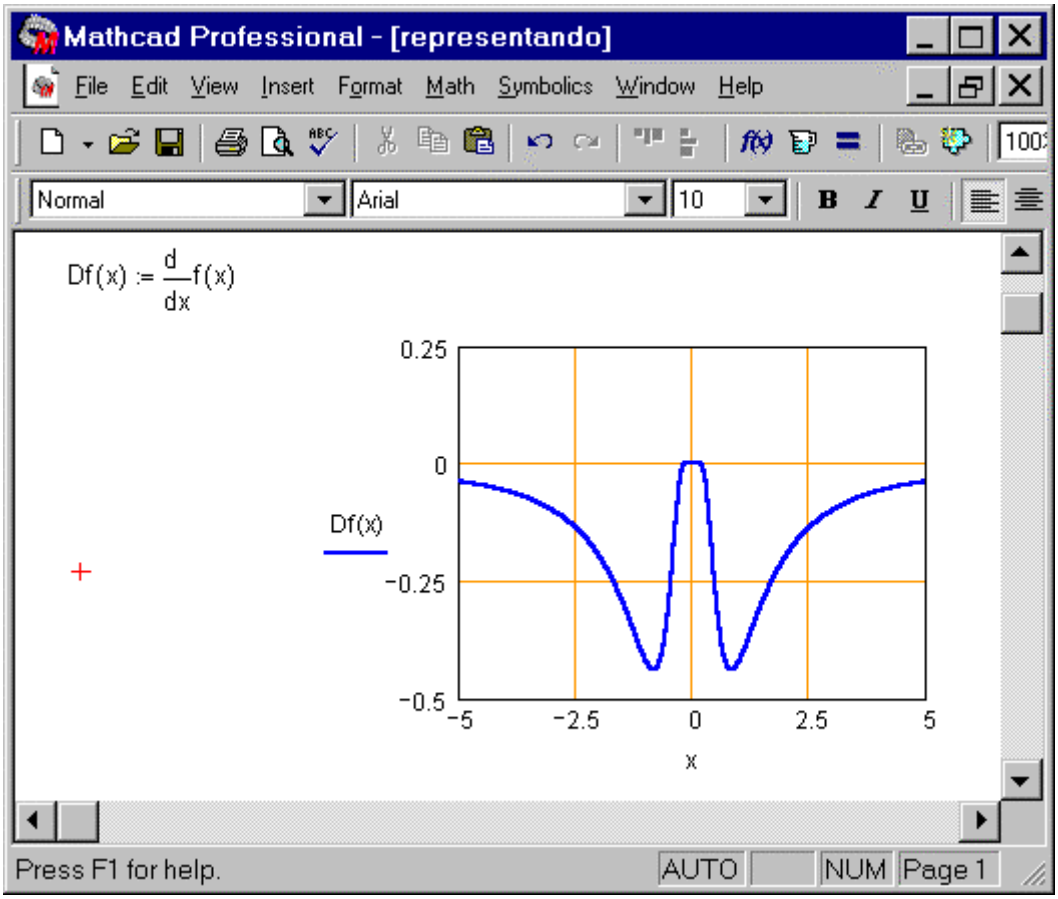
Podemos introducir modificaciones en la gráfica, por ejemplo, cambiando el trazo de la curva. Para que nos aparezca el menú que permite modificar la gráfica, cliquearemos con el botón izquierdo del ratón dos veces encima de ésta:



Entre otras opciones de suma utilidad, podemos modificar la escala (de normal a logarítmica) mediante *"Log Scale"* así como podemos sobreponer una red encima de la figura mediante la instrucción *"Grid Lines"*. Si entramos en la pestaña *"Traces"* podremos modificar el grueso del trazo de la curva así como el color o el tipo de trazo (continuo, discontinuo, etc.):



De esta forma podemos conseguir mejorar la calidad de la representación gráfica:



BIBLIOGRAFÍA

[1] H. Benker (Translated A.Rudd) (2000): "Practical use of Mathcad. Solving mathematical problems with a computer algebra system", Springer Verlag, New York, 504pp.

[2] Ph.J. Pritchard, (1998): "Mathcad: a tool for engineering problem solving. B.E.S.T. Series", McGraw-Hill, Boston, 338pp.

[3] R.W. Larsen (2001): "Introduction to MathCAD 2000", Prentice Hall, Upper Saddle River, NJ, 250pp.

[4] J. Rowell (1993): "Mathcad Education Library: Calculus", Mathsoft, Cambridge, MA.

[5] D. Kyrianov (2002): "The Mathcad 2001i Handbook", Charles River Media, Hingham, MA, 574pp.

[6] K.A. Ansari (1999): "Numerical Methods for Engineers with Mathcad", Ulyssian Publications, Spokane, WA, 360pp.

[7] S.C. Chapra and R.P. Canale (2002): "Numerical Methods for Engineers with Programming and Software Applications", 3rd edition, McGraw-Hill, New York.

[8] MathSoft Engineering & Education (2001): "Mathcad: user´s guide with reference manual", MathSoft Engineering & Education, Cambridge, MA.

[9] MathSoft, Inc (traducción de J. A. Moreno y D. Ser) (1999): "Mathcad 8. Manual de usuario y guía de referencia de Mathcad 8", ediciones Anaya Multimedia, S.A., Madrid.

[10] B. Birkenland (1997): "Mathematics with Mathcad", Studentlitteratur, Lund, Suecia.

ENLACES

[W1] http://www.mathsoft.com/
Corporación Mathsoft que produce el programa Mathcad.

[W2] http://www.addlink.es/
Distribuidor oficial del programa Mathcad en España.

[W3] http://ist.uwaterloo.ca/ic/mathcad/
En la Universidad de Waterloo hay un importante esfuerzo en la enseñanza de las matemáticas y disciplinas cuantitativas con software, en particular con Mathcad. Son muy instructivas las animaciones que se presentan para entender el funcionamiento del programa.

[W4] http://www.math.odu.edu/cbii/calcanim
Animaciones para el cálculo.

[W5] http://www2.latech.edu/~schroder/mathcd.html
Relación de archivos interesantes sobre cálculo con el Mathcad.

[W6] http://courses.lugo.com/mcad.htm
Relación de archivos interesantes sobre cálculo con el Mathcad.

[W7] http://www.softwarecientifico.com/paginas/mathcad.html
Distribuidora Software Científico en que se explica en qué consiste Mathcad y lo que éste ofrece.